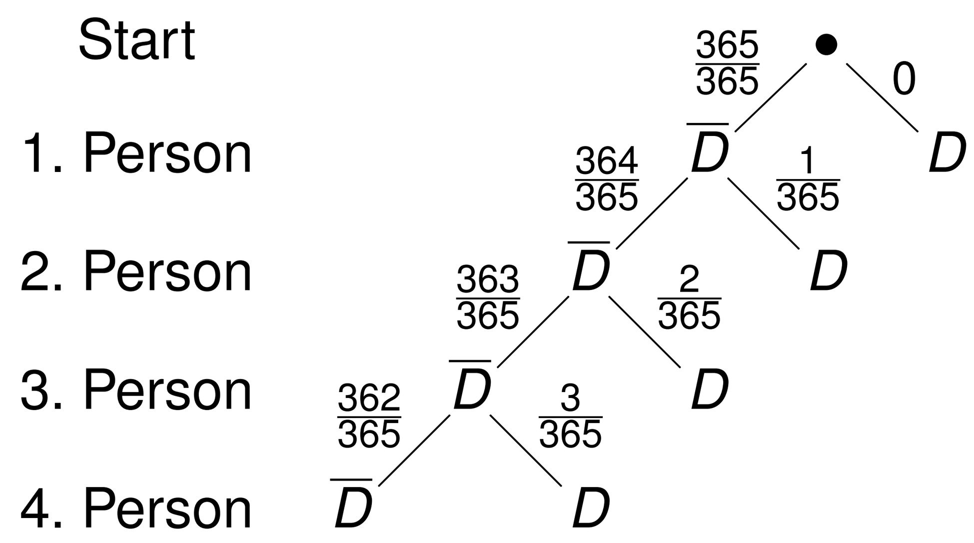
ADALBERT RAPS SCHULE

BERUFLICHES SCHULZENTRUM KULMBACH

Das Geburtstagsparadoxon

Das neue Schuljahr hat begonnen. Die Klasse 11B besitzt 23 Schüler. Um das Gemeinschaftsgefühl zu stärken, entscheidet die Klasse einen Geburtstagskalender anzufertigen. Alle Schüler treten an den Kalender und tragen ihren Geburtstag ein. Als der Schüler Peter an der Reihe ist, trifft ihn fast der Schlag: „Verrückt! Kristina hat am gleichen Tag Geburtstag wie ich!“ Kristina bemerkt: „So unwahrscheinlich ist das garnicht.“ *Hat Kristina Recht?*

Die Situation kann mit einem Urnenmodell simuliert werden. In einer Urne befinden sich 365 Kugeln, jede Kugel steht für einen Tag im Jahr. (Vereinfacht geht man davon aus, dass ein Jahr 365 Tage besitzt.) Es wird 23 Mal jeweils eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Daher handelt es sich um ein 23-stufiges Zufallsexperiment, wobei eine Stufe jeweils dem Geburtstag eines Schülers entspricht. Zunächst sollen nur die ersten vier Stufen betrachtet werden, um einen ersten Überblick zu bekommen. Das Ereignis D steht dafür, ob eine andere Person schon an diesem Datum Geburtstag hat. Es ergibt sich folgendes Baumdiagramm:



Das Ereignis G, dass von Kristina und Peter betrachtet wird, lautet: „Mindestens eine Person hat am selben Tag Geburtstag wie eine andere Person.“ Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit sollte man daher das Gegenereignis $\overline{G}$ „Alle Personen haben an einem anderen Tag Geburtstag“ nutzen. Nach dem Baumdiagramm gilt für vier Personen:

$$\begin{aligned} P(\overline{G}) &= P(\{(\overline{D},\overline{D},\overline{D},\overline{D})\}) \\ &= \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365} \\ &\approx 0{,}9836 = 98{,}36\% \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - 0{,}9836 = 0{,}0164 = 1{,}64\%$$

Man sieht, dass sich für die Berechnung des Gegenereignisses $\overline{G}$ ein System abzeichnet. Dieses kann man nutzen um die Überlegung auf beliebig viele Personen aufzuweiten. Für fünf Personen gilt:

$$\begin{aligned} P(\overline{G}) &= P(\{(\overline{D},\overline{D},\overline{D},\overline{D},\overline{D})\}) \\ &= \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}\cdot\frac{361}{365} \\ &\approx 0{,}9729 = 97{,}29\% \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - 0{,}9729 = 0{,}0271 = 2{,}71\%$$

Für die Klasse mit 23 Schülern ergibt sich dementsprechend:

$$P(\overline{G}) = P\left(\left\{\left(\underbrace{\overline{D},\overline{D},\overline{D},\ldots,\overline{D},\overline{D}}_{23\text{ Mal}}\right)\right\}\right) = \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{344}{365}\cdot\frac{343}{365} \approx 0{,}4927 = 49{,}27\%$$

$$\Rightarrow P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - 0{,}4927 = 0{,}5073 = 50{,}73\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von knapp über 50% haben in einer Klasse mit 23 Personen zwei Personen am selben Tag Geburtstag. Die Aussage Kristinas ist also richtig.