Analytische Geometrie

Die Pyramide vor dem Louvre (Auszug aus AP 2010)

Vor dem Louvre, dem berühmten Pariser Kunstmuseum, wurde im Jahr 1989 eine Glaspyramide erbaut, welche den unterirdisch liegenden Haupteingang beherbergt. Diese Pyramide wurde der Cheops-Pyramide nachempfunden. Die Seitenlänge der quadratischen, nach unten offenen Grundfläche beträgt 35 m und die Spitze S liegt lotrecht über deren Mittelpunkt in einer Höhe von 22 m. In einem geeigneten Koordinatensystem (1 LE=1 cm) sind der Ursprung O und der Punkt $B(35|35|0)$ zwei Eckpunkte der in der x_1x_2-Ebene liegenden, horizontalen Grundfläche.

Vor der Pyramide steht ein senkrechter Fahnenmast, dessen Spitze F die Koordinaten $F(40|30|8)$ besitzt. Paralleles Licht mit dem Richtungsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ erzeugt auf der Seitenfläche ABS der Pyramide den Schattenpunkt F_S der Spitze F. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes F_S.

Aus einer vorherigen Teilaufgabe ist die Gleichung der Ebene E bekannt, in der die Seitenfläche ABS liegt:

$$E\colon 22x_1 + 17{,}5x_3 - 770 = 0$$

Durch den Richtungsvektor $\vec{r}$ und den Punkt F erhält man eine Gerade, die den Lichtstrahl durch die Spitze des Fahnenmasts beschreibt:

$$s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Der gesuchte Schattenpunkt F_S entspricht somit dem Schnittpunkt der Geraden s mit der Ebene E:

$$\begin{aligned} 22 \cdot (40 - 2{,}5\lambda) + 17{,}5 \cdot (8 - 2\lambda) - 770 &= 0 \\ 500 - 180\lambda &= 0 \\ \lambda &= \frac{25}{9} \end{aligned}$$

Dieser Wert kann nun in die Gerade s eingesetzt und somit zunächst der Ortsvektor des Punkts F_S berechnet werden:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF_S} &= \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{25}{9} \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 595 \\ 390 \\ 44 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit hat der Schattenpunkt der Fahnenmastspitze die Koordinaten $F_S\left(\frac{595}{18} \,\middle|\, \frac{65}{3} \,\middle|\, \frac{22}{9}\right)$.