Analysis

Die optimale 330 ml-Dose – Wie sieht sie aus?

Besonders hinsichtlich wirtschaftlicher Aspekte sind solche Fragestellungen von großer Bedeutung. In dieser Situation ist das Volumen der Dose vorgegeben. Durch eine möglichst kleine Oberfläche kann sowohl der Materialverbrauch für den Hersteller als auch die Kosten optimiert werden.
Die Lösung kann mit Hilfe der Funktionenlehre ermittelt werden:

Gegeben: $V_{\text{Dose}} = 0{,}33\,\text{l} = 0{,}33\,\text{dm}^3$
Größe, die minimiert werden soll: O_{Dose}

Die Oberfläche der Dose O_{Dose} lässt sich als Funktion auffassen, welche von den beiden Variablen r und h abhängt:

$$\begin{aligned} O_{\text{Dose}}(r;h) &= 2\cdot \underbrace{O_G}_{\text{Grundfläche}} + \underbrace{O_M}_{\text{Mantel}} \\ &= 2r^2\pi + 2r\pi h \end{aligned}$$

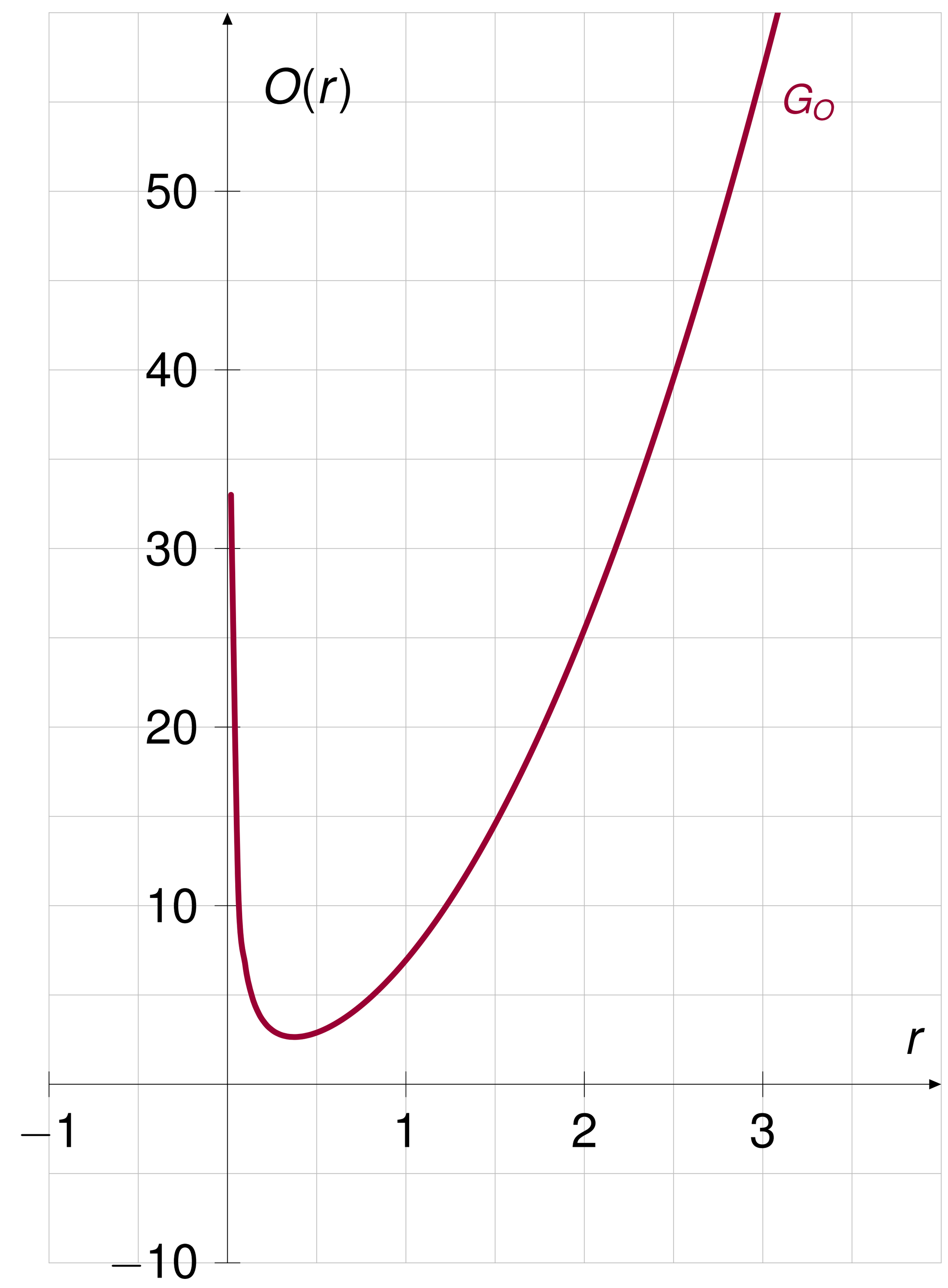
Durch die Nebenbedingung des vorgegebenen Volumens lässt sich eine der beiden Variablen eliminieren:

$$\begin{aligned} V &= r^2\pi h \\ h &= \frac{V}{r^2\pi} \end{aligned}$$

Man ersetzt die Variable h durch den gefundenen Ausdruck, wodurch die Oberflächenfunktion nur noch vom Radius r abhängt:

$$\begin{aligned} O_{\text{Dose}}(r) &= 2r^2\pi + 2r\pi\frac{0{,}33}{r^2\pi} \\ &= 2r^2\pi + \frac{0{,}66}{r} \end{aligned}$$

Die Funktion lässt sich in einem Koordinatensystem graphisch darstellen, wobei nur positive Radien betrachtet werden müssen:



Wie man dem Graphen entnehmen kann, liegt der Radius r_{min} bei ungefähr 0,4 dm. Mit Hilfe der Ableitung lässt sich dieser Radius r_{min} exakt bestimmen:

$$\begin{aligned} O'_{\text{Dose}}(r) &= 4r\pi - \frac{0{,}66}{r^2} \\ 0 &= 4r\pi - \frac{0{,}66}{r^2} \\ \frac{0{,}66}{r^2} &= 4r\pi \\ \frac{0{,}165}{\pi} &= r^3 \\ r &= \sqrt[3]{\frac{0{,}165}{\pi}} \approx 0{,}374\,[\text{dm}] \end{aligned}$$

Durch eine Vorzeichentabelle lässt sich nachweisen, dass es sich tatsächlich um einen minimalen Wert handelt:

r		$\sqrt[3]{\frac{0{,}165}{\pi}}$	
$O'_{\text{Dose}}(r)$	$-$	0	$+$
$G_{O_{\text{Dose}}}$	fallend		steigend

Für die Höhe der Dose ergibt sich dann

$$\begin{aligned} h &\approx 0{,}749\,[\text{dm}] \\ &\approx 2r \end{aligned}$$

Die Höhe der Dose entspricht somit genau ihrem Durchmesser.